

RETO MATEMÁTICO

Club de Matemática EPN¹✉

¹Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador

✉ club.matematica.epn@gmail.com

Fecha de envío: 12 de agosto de 2021

1. SOLUCIÓN AL RETO ANTERIOR

EJERCICIO 1. Halle todos los primos p tales que

$$p^2 + 1 = 2x^2, \quad (1)$$

$$p + 1 = 2y^2, \quad (2)$$

tiene solución para x, y enteros no negativos.

Solución. Supongamos que p es primo y x, y son enteros no negativos tal que cumple (1) y (2). Restando (2) de (1) obtenemos:

$$p^2 - p = 2x^2 - 2y^2, \quad (3)$$

de donde

$$p(p - 1) = 2(x - y)(x + y). \quad (4)$$

Como p es primo, $p > p - 1$ y x e y son enteros no negativos en, en (4) vemos que p tiene que ser igual al mayor de los factores del segundo miembro, es decir:

$$p = x + y; \quad (5)$$

y, por tanto

$$p - 1 = 2(x - y). \quad (6)$$

Ahora, multiplicando (5) por 2 y restando de esto (6) nos queda

$$p + 1 = 4y. \quad (7)$$

Reemplazando (2) en (7) resulta

$$2y^2 = 4y$$

$$y = 2.$$

Usando este valor en (7) obtenemos

$$p = 7.$$

Finalmente, usando los valores de y y p en (5) tenemos

$$x = 5.$$

Concluimos que $p = 7$ es el único primo que satisface (1) y (2) para x, y enteros no negativos. □

2. RETO DE ESTA EDICIÓN

Se plantea el siguiente problema. Quien lo resuelva ganará un premio otorgado por la AsoiMat, la resolución deberá ser enviada al correo asomat.epn@gmail.com. La revisión será realizada por el MMath. David Emanuel Pazmiño. El ganador será publicado en la siguiente edición.

EJERCICIO 2. *Demuestre que*

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{2^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n+2^{n-1}}{2^n} \right\rfloor = n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se recuerda que la función $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función piso que toma el valor del mayor número entero que sea menor o igual a su argumento.

Reglas para ganar el reto:

- El premio será para la primera persona que envíe esta solución con las características que se mencionan a continuación.
- Cualquier solución que sea obtenida de internet será anulada.
- La solución debe ser enviada en LaTeX (adjuntar PDF) de manera clara, concisa y cada paso debe ser detallado.
- En caso de usar teoremas o lemas, estos deben ser citados.
- Si bien la respuesta es única, la ganadora será la respuesta más creativa. Así que pon en práctica tu destreza e ingenio.
- Si dos formas de resolución son iguales, automáticamente serán anuladas. No admitiremos plagios.